

# Die Flügel der Balmer- und Paschen-Linien des atomaren Wasserstoffs: Ein Vergleich zwischen Theorie und Experiment

HANS PFENNIG

Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik, München

(Z. Naturforsch. 21 a, 1648—1659 [1966]; eingegangen am 2. Mai 1966)

The profiles of the BALMER- and PASCHEN-lines of hydrogen being emitted from a plasma of relatively low electron-density and temperature ( $N_e = 1.3 \times 10^{13} \text{ cm}^{-3}$ ,  $T = 1850 \text{ }^\circ\text{K}$ ) are compared with theoretical profiles based on a quasistatic treatment of the ions and electrons. For a region extending from the line wing to a point lying well inside of HOLSTEIN's frequency limit a satisfactory agreement with experiment can be achieved by using ECKER's microfield-distribution folded with itself and by inserting values of the parameter  $r_0/\lambda$  ( $r_0 \approx$  mean particle distance,  $\lambda =$  DEBYE length) being roughly twice as high as one would calculate from the values of  $N_e$  and  $T$ . Within the framework of the quasi-static theory there seems to be no way of explaining the discrepancy between the high value of  $r_0/\lambda$  which fits the experimental curves best and the theoretical value which is lower by a factor of about 2.

In dieser Arbeit werden die BALMER- und PASCHEN-Linien des atomaren Wasserstoffs im Hinblick auf die Theorie der Linienverbreiterung in nahezu derselben Weise untersucht, wie das in einer früheren Arbeit <sup>1a, 1b</sup> bereits für die diffusen Helium-Linien geschehen ist. Unter Hinweis auf <sup>1a, 1b</sup> ist es daher hier möglich, vielfach eine sehr viel knappere Darstellungsart als dort zu wählen. Für einen Überblick über das ganze Gebiet ziehe man zusammenfassende Darstellungen wie <sup>2-8</sup> heran.

## A. Quasistatische Theorie der Linienverbreiterung

Die betrachtete Spektrallinie des atomaren Wasserstoffs entstehe in einem optisch dünnen Plasma, ihre relative Intensität bei der Wellenzahl  $\bar{\nu}$  werde

$$J(\bar{\nu})$$

genannt und sei so normiert, daß

$$\int_0^\infty J(\bar{\nu}) d\bar{\nu} = 1 \quad (1)$$

gilt.

Es sei:

- $k$  die Gesamtheit aller Quantenzahlen, die eine Linienkomponente kennzeichnen,  
 $\bar{\nu}_k(F)$  die Wellenzahl der Komponente  $k$  unter dem Einfluß eines (homogenen) elektrischen Feldes vom Absolutbetrag  $F$ ,  
 $\bar{\nu}(0)$  die Wellenzahl der ungestörten Linie,  
 $\Delta\bar{\nu}_k(F) \equiv \bar{\nu}_k(F) - \bar{\nu}(0)$ ,  
 $F_k(\Delta\bar{\nu})$  die zu  $\Delta\bar{\nu}_k(F)$  inverse Funktion:  
 $\Delta\bar{\nu}_k(F_k(\Delta\bar{\nu})) \equiv \Delta\bar{\nu}$ ,

$W(F) dF$  die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Absolutbetrag des elektrischen Feldes zwischen  $F$  und  $F + dF$  liegt:

$$\int_0^\infty W(F) dF = 1, \quad (2)$$

$I_k(F)$  die je Atom im zeitlichen Mittel in der Gestalt elektrischer Dipolstrahlung in der Komponente  $k$  je Zeiteinheit abgegebene Energie, bezogen auf die Strahlungsleistung der gesamten Linie:

$$I_k(F) = \frac{\bar{\nu}_k^4(F) |\langle a(F) | \mathfrak{P} | b(F) \rangle|^2}{\sum_{k'} \bar{\nu}_{k'}^4(F) |\langle a'(F) | \mathfrak{P} | b'(F) \rangle|^2} \quad (3)$$

In dieser Gleichung bezeichnet

$$\langle a(F) | \mathfrak{P} | b(F) \rangle$$

<sup>1</sup> H. PFENNIG u. E. TREFFTZ, a) Z. Phys. **190**, 253 [1966]; b) Z. Naturforsch. **21 a**, 697 [1966].

<sup>2</sup> A. UNSÖLD, Physik der Sternatmosphären, 2. Auflage, Springer-Verlag, Berlin — Göttingen — Heidelberg 1955.

<sup>3</sup> H. MARGENAU u. M. LEWIS, Rev. Mod. Phys. **31**, 569 [1959].

<sup>4</sup> G. TRAVING, Über die Theorie der Druckverbreiterung von Spektrallinien, G. Braun, Karlsruhe 1960.

<sup>5</sup> K. H. BÖHM, Basic Theory of Line Formation, veröffentlicht als Beitrag zu J. L. GREENSTEIN (Ed.), Stellar Atmospheres (Stars and Stellar Systems, Vol. VI); University of Chicago Press, Chicago, Ill. 1960.

<sup>6</sup> M. BARANGER, Spectral Line Broadening in Plasmas, veröffentlicht als Beitrag zu D. R. BATES (Ed.), Atomic and Molecular Processes, Academic Press, New York—London 1962.

<sup>7</sup> H. R. GRIEM, Plasma Spectroscopy, McGraw-Hill, New York—San Francisco—Toronto—London 1964.

<sup>8</sup> H. VAN REGEMORTER, Spectral Line Broadening, veröffentlicht als Beitrag zu L. GOLDBERG, A. J. DEUTSCH, D. LAYZER (Ed.), Annual Review of Astronomy and Astrophysics, Vol. 3, Annual Reviews, Inc., Palo Alto, Calif. 1965.



das Matricelement des elektrischen Dipolmomentes bei der Feldstärke  $F$  zwischen den Zuständen, die zur Komponente  $k$  gehören und durch die Sätze von Quantenzahlen  $a$  und  $b$  gekennzeichnet sind.

Vom Standpunkt der quasistatischen Theorie aus ist  $J(\bar{\nu})$  aus diesen Größen wie folgt zu berechnen:

$$J(\bar{\nu}) = \sum_k I_k(F_k(\bar{\nu} - \bar{\nu}(0))) \cdot W(F_k(\bar{\nu} - \bar{\nu}(0))) \cdot \left| \frac{dF_k(\bar{\nu} - \bar{\nu}(0))}{d\bar{\nu}} \right|. \quad (4)$$

Aus den Gln. (2) bis (4) ergibt sich in der Tat die Gl. (1).

Die Gl. (4) läßt sich durch zwei Annahmen vereinfachen:

a) Der STARK-Effekt sei linear, es sei statthaft, die Abhängigkeit der Dipolmatricelemente von  $F$  zu vernachlässigen.

b) Es sei für alle  $k$

$$|\Delta\bar{\nu}_k(F)| \ll \bar{\nu}(0), \quad (5)$$

so daß es genügt, in Gl. (3) die Faktoren  $\bar{\nu}_k^4(F)$  bzw.  $\bar{\nu}_k^4(F)$  durch  $\bar{\nu}^4(0)$  zu ersetzen.

Inwieweit diese Annahmen zulässig sind, wird später erörtert werden [siehe Gl. (30) ff.].

Gemäß a) gilt

$$\Delta\bar{\nu}_k(F) = K_k F \quad (6)$$

mit der STARK-Effekt-Konstanten

$$K_k = \frac{\hbar}{2\pi m e c} \cdot \frac{3}{2} \cdot [n_a(n_{1,a} - n_{2,a}) - n_b(n_{1,b} - n_{2,b})] \quad (7)$$

(vgl. z. B. <sup>9</sup>, p. 230).  $n_1$  und  $n_2$  sind die bei der Quantisierung in parabolischen Koordinaten auftretenden Quantenzahlen, sie tragen hier ebenso wie die Hauptquantenzahl  $n$  zusätzlich die Indizes  $a$  bzw.  $b$ , je nachdem, ob sie zum oberen oder unteren Zustand der Linienkomponente  $k$  gehören.

Gemäß den Annahmen a) und b) geht ferner die Gl. (3) in

$$I_k = \frac{|\langle a | \mathfrak{P} | b \rangle|^2}{\sum_{k'} |\langle a' | \mathfrak{P} | b' \rangle|^2} \quad (8)$$

über. Die Matricelemente in dieser Gleichung sind in bekannter Weise (siehe z. B. <sup>9</sup>, p. 276) auszurechnen.

Somit erhält man für das Linienprofil

$$J(\bar{\nu}(0) + \Delta\bar{\nu}) = \sum_{\substack{k \\ K_k \neq 0}} \frac{I_k}{|K_k|} W\left(\frac{\Delta\bar{\nu}}{K_k}\right) + \sum_{K_k = 0} I_k \delta(\Delta\bar{\nu}) \quad (9)$$

$\text{Sgn}\{\Delta\bar{\nu}\} = \text{Sgn}\{K_k\}$

Die Nebenbedingung  $\text{Sgn}\{\Delta\bar{\nu}\} = \text{Sgn}\{K_k\}$  stellt sicher, daß die Summation sich nur über die Komponenten  $k$  jeweils eines Linienflügels erstreckt.

$\delta(\Delta\bar{\nu})$  bezeichnet die DIRACsche Delta-Funktion. Wie man sich leicht überzeugt, folgt aus Gl. (9) wiederum die Gl. (1). Diese Normierung stimmt mit der bei <sup>2</sup>, p. 322 und <sup>4</sup>, p. 77 überein, sie weicht von der bei <sup>10</sup> dadurch ab, daß dort die unverschobenen Mittelkomponenten ( $K_k = 0$ ) nicht in die Normierung mit einbezogen sind.

Es ist üblich und zweckmäßig, auf dem Wege über

$$\frac{4}{15} (2\pi)^{3/2} r_0^3 N = 1. \quad (10)$$

die HOLTSMARKSche Normalfeldstärke

$$F_0 = e/r_0^2 = 2,6031 e N^{2/3} \quad (11)$$

einzuführen und mit ihrer Hilfe von der Verteilungsdichte  $W(F)$  für  $F$  zu der für

$$\beta = F/F_0 \quad (12)$$

überzugehen:

$$H(\beta) = F_0 W(F). \quad (13)$$

Die Frage, ob unter  $N$  die Teilchendichte für die Ionen, die Elektronen oder beide zusammen zu verstehen ist, kann zunächst offen bleiben.

Im Anschluß an den physikalischen Sprachgebrauch mögen  $W(F)$  und  $H(\beta)$  von nun an in gleicher Weise Mikrofeldverteilung heißen. Die Mikrofeldverteilung an einem neutralen Aufpunkt — um einen solchen handelt es sich ja bei dem leuchtenden Wasserstoff-Atom — ist bisher in einer Reihe von Arbeiten <sup>11–15</sup> behandelt worden, ihre Voraussetzungen und Ergebnisse sind in dem Abschnitt C 3 von <sup>1b</sup> noch einmal kurz beschrieben, auf den hinsichtlich aller Einzelheiten verwiesen sei.

<sup>9</sup> H. A. BETHE u. E. E. SALPETER, Quantum Mechanics of One- and Two-Electron Atoms, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1957.

<sup>10</sup> A. B. UNDERHILL u. J. H. WADDELL, Stark Broadening Functions for the Hydrogen Lines, Nat. Bur. Stand. Circular **603**, Washington, D.C. 1959.

<sup>11</sup> J. HOLTSMARK, a) Phys. Z. **20**, 162 [1919]; b) Ann. Phys. (IV) **58**, 577 [1919]; c) Phys. Z. **25**, 73 [1924].

<sup>12</sup> a) G. ECKER, Z. Phys. **148**, 593 [1957]; b) G. ECKER u. K. G. MÜLLER, Z. Phys. **153**, 317 [1958].

<sup>13</sup> H. HOFFMAN u. O. THEIMER, Astrophys. J. **127**, 477 [1958].

<sup>14</sup> B. MOZER, Atomic Line Shapes from a Plasma  $\equiv$  Technical Report No. 3, Contract Nonr-760(15), Office of Naval Research; Pittsburgh, Pa.: Carnegie Institute of Technology, Dept. of Physics.

<sup>15</sup> B. MOZER u. M. BARANGER, a) Phys. Rev. **115**, 521 [1959]; b) **118**, 626 [1960].

Diesen Mikrofeldverteilungen ist die Eigenschaft gemeinsam, daß sie sich folgendermaßen darstellen lassen:

$$H(\beta; y) = \frac{2\beta}{\pi} \int_0^\infty x f(x; v) \sin(\beta x) dx, \quad (14 a)$$

$$f(x; v) = \exp \left\{ -x^{3/2} [\psi_1(v) - \psi_2(v)] \right\}, \quad (14 b)$$

$$v = x^{1/2} y. \quad (14 c)$$

Die Mikrofeldverteilung hängt also im allgemeinen auch noch von einem Parameter

$$y = r_0/\lambda \quad (15)$$

ab. Dabei ist

$$\lambda = \sqrt{k T / (4 \pi N e^2)} \quad (16)$$

die DEBYE-Länge.

In dem Term  $\psi_2(v)$  kommt der Einfluß der Zweier-Korrelation der Störteilchen untereinander zum Ausdruck, er ist nur bei den Mikrofeldverteilungen gemäß <sup>14</sup>, <sup>15 a</sup>, <sup>b</sup>  $\neq 0$ .

Mit  $H(\beta; y)$  ist zunächst die Verteilung des Mikrofeldes gemeint, das von Störteilchen einer Sorte (Elektronen oder Ionen) herrührt. Demgemäß sind  $r_0$  und  $\lambda$  und damit auch  $F_0$  und  $y$  mit

$$N = N_i = N_e \quad (17)$$

zu bilden ( $N_i = N_e$  = Zahl der Ionen bzw. Elektronen je Raumeinheit).

In den Fällen, in denen sowohl die Ionen als auch die Elektronen gemäß der quasistatischen Theorie zu behandeln sind, ergibt sich die Verteilung für das resultierende Mikrofeld

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^{(i)} + \mathfrak{F}^{(e)} \quad (18)$$

durch Faltung <sup>16</sup>:

$$\mathcal{W}(\mathfrak{F}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{W}^{(i)}(\mathfrak{F}') \mathcal{W}^{(e)}(\mathfrak{F} - \mathfrak{F}') d^3 \mathfrak{F}'. \quad (19)$$

Nach einem bekannten mathematischen Satz entspricht der Faltung zweier Funktionen die Multiplikation ihrer FOURIER-Transformierten [hier der  $f(x; v)$ ], das Endergebnis hat daher wieder die Gestalt der Gl. (14 a):

$$H^{(i+e)}(\beta^{(i+e)}; y) = \frac{2\beta^{(i+e)}}{\pi} \int_0^\infty x f^{(i+e)}(x; v) \sin(\beta^{(i+e)} x) dx, \quad (20 a)$$

<sup>16</sup>  $\mathcal{W}(\mathfrak{F})$  bezeichne, ohne daß ausdrücklich ein neues Funktionssymbol eingeführt wird, die Verteilungsdichte für den Vektor  $\mathfrak{F}$ . Wegen der vorausgesetzten Isotropie des Raumes besteht zwischen  $\mathcal{W}(\mathfrak{F})$  und  $\mathcal{W}(F)$  der Zusammenhang  $\mathcal{W}(F) = 4 \pi F^2 \mathcal{W}(\mathfrak{F})$ .

es treten aber

$$f^{(i+e)}(x; v) = \exp \left\{ -\frac{x^{3/2}}{2} [\psi_1^{(i)}(2^{-1/2} v) - \psi_2^{(i)}(2^{-1/2} v) + \psi_1^{(e)}(2^{-1/2} v) - \psi_2^{(e)}(2^{-1/2} v)] \right\} \quad (20 b)$$

an die Stelle von  $f(x; v)$  und

$$F_0^{(i+e)} = 2,6031 e (N_i + N_e)^{2/3} = 2^{2/3} F_0 \quad (21)$$

an die von  $F_0$ :

$$\beta^{(i+e)} = F/F_0^{(i+e)}. \quad (22)$$

Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß unter  $y$  auch weiterhin der Wert zu verstehen ist, der aus seiner ursprünglichen Erklärung in den Gl. (15) bis (17) folgt:

$$y = \left( \frac{15}{4(2\pi)^{3/2}} \right)^{1/3} \left( \frac{4\pi e^2}{k} \right)^{1/2} T^{-1/2} N_e^{1/6}. \quad (23)$$

Der Gl. (20 b) entspricht in <sup>1 b</sup> die Gl. (C, 21 d). Die Faktoren  $^{1/2}$  und  $2^{-1/3}$ , die hier zusätzlich auftreten, sind darauf zurückzuführen, daß dort  $F_0$  mit der einfachen Teilchendichte  $N_i = N_e$  zu bilden ist.

Die Größen, die sich auf die Faltung beziehen, sind derart gewählt, daß unmittelbar und ohne jede Umrechnung ein Vergleich zwischen einer gefalteten Mikrofeldverteilung  $H^{(i+e)}(\beta^{(i+e)}; y)$  und einer nicht gefalteten  $H(\beta; y)$  möglich ist. Das gilt z. B. für den Vergleich mit den Werten der Tab. 2 aus <sup>1 b</sup>. Dagegen ist es aus den eben genannten Gründen erforderlich, die Werte der Tab. 3 aus <sup>1 b</sup> (dort mit  $H(\beta; y)$  für „gemischte Komponente“ und „Spezialmischung“ bezeichnet) wie folgt umzurechnen [siehe <sup>1 b</sup>, Gl. (G, 49 a)]:

$$H^{(i+e)}(\beta^{(i+e)}; y) = 2^{2/3} H(2^{2/3} \beta^{(i+e)}; y) \quad (24)$$

Zur Berechnung von  $\psi_1(v)$ ,  $\psi_2(v)$  und  $H(\beta; y)$  bzw.  $H^{(i+e)}(\beta^{(i+e)}; y)$  dienen dieselben numerischen Verfahren wie in <sup>1 b</sup> (siehe dort Abschnitt C 4). Die Reihenentwicklungen, insbesondere die asymptotischen Reihen für  $H(\beta; y)$  nach fallenden Potenzen von  $\beta$  für  $\beta \gg 1$  wurden ebenfalls ungeändert übernommen, wenn man von den geringfügigen Änderungen absieht, die der Unterschied in der Definition der Mikrofeldverteilung im Falle der Faltung bedingt.

Besonders im Hinblick auf die Gl. (40) sei bemerkt, daß für alle hier betrachteten Mikrofeldverteilungen unabhängig vom Wert von  $y$  für  $\beta \gg 1$

$$H(\beta) \cong \frac{15}{4\sqrt{2}\pi} \beta^{-5/2} = 1,496 \beta^{-5/2} \quad (25)$$

gilt.

Um schwerfällige Wiederholungen, vor allem in den Abbildungen und deren Begleittext, zu vermeiden, sollen die Mikrofeldverteilungen Buchstaben als Namen erhalten, und zwar nach dem folgenden Muster, das durch den Abschnitt C 3 von <sup>1b</sup> nahegelegt ist:

- a** : Mikrofeldverteilung von HOLTSMARK <sup>11</sup>,
- b** : Mikrofeldverteilung von ECKER et al. <sup>12, 13</sup>,
- c<sub>1</sub>** : Mikrofeldverteilung von MOZER und BARANGER <sup>14, 15</sup>, langsam veränderliche Komponente,
- c<sub>2</sub>** : Mikrofeldverteilung von MOZER und BARANGER <sup>14, 15</sup>, schnell veränderliche Komponente.

Das Ergebnis der Faltung der Mikrofeldverteilung von ECKER et al. mit sich selbst soll **bb** heißen usw.

In der Abb. 1 ist der Verlauf verschiedener Mikrofeldverteilungen abgebildet. Die Mikrofeldverteilung **aa** ist trotz der Faltung wiederum eine HOLTSMARK-Verteilung, allerdings mit  $\beta^{(j+e)}$  als unabhängiger

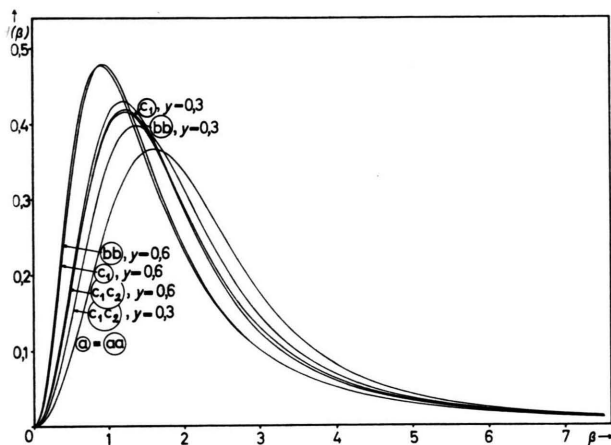


Abb. 1. Verschiedene Mikrofeldverteilungen bei gemeinsamem quasistatischem Wirken von Ionen und Elektronen; zur Definition von  $H^{(i+e)}(\beta^{(i+e)}; y)$ ,  $\beta^{(i+e)}$  und  $y$  siehe die Gln. (20 a), (22) und (15). Die Bedeutung der Abkürzungen **a** usw. ist im Text erklärt.

Veränderlicher. Der Mikrofeldverteilung **bb** liegt die Vorstellung zugrunde, die elektrischen Felder der Ionen und Elektronen seien in derselben Weise DEBYE-abgeschirmt, im übrigen aber bewegten sich diese Teilchen völlig unabhängig voneinander. Die

Mikrofeldverteilung **c<sub>1</sub> c<sub>2</sub>** ist die „gemischte Komponente“ von <sup>1b</sup>. Es fällt auf, wie wenig sich die Mikrofeldverteilungen **c<sub>1</sub>** und **bb** voneinander unterscheiden, ein Eindruck, der sich bei den entsprechenden Linienprofilen erst recht bestätigen wird.

Dem Zweck, die Linienprofile zu berechnen, soll in erster Linie die Mikrofeldverteilung **bb** dienen. Es liegt nahe, sie bei der quasistatischen Behandlung von Ionen und Elektronen vorzuziehen, da bei ihr keine Teilchensorte vor der anderen ausgezeichnet ist.

In Tab. 1 findet man die Werte der Mikrofeldverteilung **bb** im Bereich  $0 \leq \beta \leq 10$  für die Parameterwerte  $y = 0; 0,2; 0,4; 0,6$  und  $0,8$ .

An Hand der Gl. (20) kann man sich leicht überlegen, daß bei der Faltung einer Mikrofeldverteilung mit sich selbst für jedes beliebige  $\beta'$  die Gl.

$$H^{(i+e)}(\beta'; 2^{1/3} y) = H(\beta'; y) \quad (26)$$

erfüllt ist. Diese Beziehung wurde ausgenutzt, um das Programm für die Mikrofeldverteilung im Hinblick auf die Faltung zu prüfen. Es wurde nur in einem Falle ein Unterschied zwischen der linken und rechten Seite der Gl. (26) gefunden, relativ ist er kleiner als  $1,22 \cdot 10^{-6}$ .

Die Zuverlässigkeit des Programmes für die Linienprofile läßt sich leicht überprüfen, da ja für  $y = 0$  die Ergebnisse von <sup>10</sup> herauskommen müssen, wenn man die Unterschiede in der Normierung berücksichtigt. Es stellt sich heraus, daß der relative Unterschied gegenüber den Tabellen in <sup>10</sup> für die BALMER-Linien  $H_6$  bis  $H_{16}$  und die PASCHEN-Linien  $P_6$  bis  $P_{16}$  weniger als  $6 \cdot 10^{-4}$  beträgt.

Im Anschluß an Arbeiten von LENZ, BURCKHARDT und SPITZER haben HOLSTEIN <sup>17</sup> und SOBELMAN <sup>18</sup> die Lage der Grenze zwischen den Gültigkeitsbereichen der quasistatischen und der Stoßdämpfungstheorie genauer abgeschätzt. In der Fassung, die in <sup>2</sup>, p. 312 zu finden ist, lautet ihr Ergebnis für den Fall des linearen STARK-Effektes folgendermaßen <sup>19</sup>:

$$\Delta \bar{\nu}_{Gr} = \frac{\bar{\nu}^2}{4 \pi^4 c^2 e K}. \quad (27 a)$$

Dabei bezeichnet  $K$  eine mittlere STARK-Effekt-Konstante [siehe Gl. (7)].

<sup>17</sup> T. HOLSTEIN, Phys. Rev. **79**, 744 [1950].

<sup>18</sup> I. I. SOBELMAN, Fortschr. Phys. **5**, 175 [1957].

<sup>19</sup> Die Abschätzungen anderer Verfasser führen in der Regel auf etwas größere Werte für  $\Delta \bar{\nu}_{Gr}$ ; so sind die z. B. in <sup>4</sup>, p. 43, angegebenen (und in <sup>1</sup> benutzten)  $\Delta \bar{\nu}_{Gr}$  etwa doppelt so groß wie diejenigen, die sich aus Gl. (27 a) ergeben.

$\beta^{(i+e)} \backslash y$	0	0,2	0,4	0,6	0,8
0,10	$4,225 \cdot 10^{-3}$	$6,896 \cdot 10^{-3}$	$1,184 \cdot 10^{-2}$	$2,135 \cdot 10^{-2}$	$4,021 \cdot 10^{-2}$
0,20	$1,667 \cdot 10^{-2}$	$2,699 \cdot 10^{-2}$	$4,566 \cdot 10^{-2}$	$8,004 \cdot 10^{-2}$	$1,427 \cdot 10^{-1}$
0,30	$3,664 \cdot 10^{-2}$	$5,857 \cdot 10^{-2}$	$9,678 \cdot 10^{-2}$	$1,624 \cdot 10^{-1}$	$2,679 \cdot 10^{-1}$
0,40	$6,308 \cdot 10^{-2}$	$9,905 \cdot 10^{-2}$	$1,586 \cdot 10^{-1}$	$2,518 \cdot 10^{-1}$	$3,806 \cdot 10^{-1}$
0,50	$9,460 \cdot 10^{-2}$	$1,452 \cdot 10^{-1}$	$2,237 \cdot 10^{-1}$	$3,338 \cdot 10^{-1}$	$4,626 \cdot 10^{-1}$
0,60	$1,296 \cdot 10^{-1}$	$1,938 \cdot 10^{-1}$	$2,858 \cdot 10^{-1}$	$3,994 \cdot 10^{-1}$	$5,102 \cdot 10^{-1}$
0,70	$1,664 \cdot 10^{-1}$	$2,414 \cdot 10^{-1}$	$3,396 \cdot 10^{-1}$	$4,447 \cdot 10^{-1}$	$5,282 \cdot 10^{-1}$
0,80	$2,032 \cdot 10^{-1}$	$2,853 \cdot 10^{-1}$	$3,820 \cdot 10^{-1}$	$4,699 \cdot 10^{-1}$	$5,241 \cdot 10^{-1}$
0,90	$2,386 \cdot 10^{-1}$	$3,233 \cdot 10^{-1}$	$4,117 \cdot 10^{-1}$	$4,778 \cdot 10^{-1}$	$5,051 \cdot 10^{-1}$
1,00	$2,712 \cdot 10^{-1}$	$3,539 \cdot 10^{-1}$	$4,289 \cdot 10^{-1}$	$4,721 \cdot 10^{-1}$	$4,771 \cdot 10^{-1}$
1,10	$2,999 \cdot 10^{-1}$	$3,765 \cdot 10^{-1}$	$4,348 \cdot 10^{-1}$	$4,566 \cdot 10^{-1}$	$4,447 \cdot 10^{-1}$
1,20	$3,238 \cdot 10^{-1}$	$3,909 \cdot 10^{-1}$	$4,313 \cdot 10^{-1}$	$4,345 \cdot 10^{-1}$	$4,104 \cdot 10^{-1}$
1,30	$3,425 \cdot 10^{-1}$	$3,975 \cdot 10^{-1}$	$4,204 \cdot 10^{-1}$	$4,086 \cdot 10^{-1}$	$3,765 \cdot 10^{-1}$
1,40	$3,557 \cdot 10^{-1}$	$3,973 \cdot 10^{-1}$	$4,039 \cdot 10^{-1}$	$3,808 \cdot 10^{-1}$	$3,441 \cdot 10^{-1}$
1,50	$3,636 \cdot 10^{-1}$	$3,911 \cdot 10^{-1}$	$3,838 \cdot 10^{-1}$	$3,527 \cdot 10^{-1}$	$3,137 \cdot 10^{-1}$
1,60	$3,663 \cdot 10^{-1}$	$3,801 \cdot 10^{-1}$	$3,615 \cdot 10^{-1}$	$3,252 \cdot 10^{-1}$	$2,856 \cdot 10^{-1}$
1,80	$3,585 \cdot 10^{-1}$	$3,482 \cdot 10^{-1}$	$3,145 \cdot 10^{-1}$	$2,741 \cdot 10^{-1}$	$2,368 \cdot 10^{-1}$
2,00	$3,369 \cdot 10^{-1}$	$3,094 \cdot 10^{-1}$	$2,691 \cdot 10^{-1}$	$2,301 \cdot 10^{-1}$	$1,970 \cdot 10^{-1}$
2,20	$3,068 \cdot 10^{-1}$	$2,693 \cdot 10^{-1}$	$2,284 \cdot 10^{-1}$	$1,932 \cdot 10^{-1}$	$1,647 \cdot 10^{-1}$
2,40	$2,727 \cdot 10^{-1}$	$2,314 \cdot 10^{-1}$	$1,933 \cdot 10^{-1}$	$1,627 \cdot 10^{-1}$	$1,387 \cdot 10^{-1}$
2,60	$2,382 \cdot 10^{-1}$	$1,975 \cdot 10^{-1}$	$1,637 \cdot 10^{-1}$	$1,377 \cdot 10^{-1}$	$1,176 \cdot 10^{-1}$
2,80	$2,056 \cdot 10^{-1}$	$1,680 \cdot 10^{-1}$	$1,390 \cdot 10^{-1}$	$1,172 \cdot 10^{-1}$	$1,005 \cdot 10^{-1}$
3,00	$1,761 \cdot 10^{-1}$	$1,430 \cdot 10^{-1}$	$1,185 \cdot 10^{-1}$	$1,004 \cdot 10^{-1}$	$8,647 \cdot 10^{-2}$
3,25	$1,444 \cdot 10^{-1}$	$1,173 \cdot 10^{-1}$	$9,783 \cdot 10^{-2}$	$8,340 \cdot 10^{-2}$	$7,229 \cdot 10^{-2}$
3,50	$1,184 \cdot 10^{-1}$	$9,677 \cdot 10^{-2}$	$8,145 \cdot 10^{-2}$	$6,998 \cdot 10^{-2}$	$6,101 \cdot 10^{-2}$
3,75	$9,741 \cdot 10^{-2}$	$8,049 \cdot 10^{-2}$	$6,841 \cdot 10^{-2}$	$5,925 \cdot 10^{-2}$	$5,199 \cdot 10^{-2}$
4,00	$8,067 \cdot 10^{-2}$	$6,750 \cdot 10^{-2}$	$5,796 \cdot 10^{-2}$	$5,061 \cdot 10^{-2}$	$4,472 \cdot 10^{-2}$
4,25	$6,733 \cdot 10^{-2}$	$5,709 \cdot 10^{-2}$	$4,951 \cdot 10^{-2}$	$4,357 \cdot 10^{-2}$	$3,876 \cdot 10^{-2}$
4,50	$5,667 \cdot 10^{-2}$	$4,868 \cdot 10^{-2}$	$4,262 \cdot 10^{-2}$	$3,778 \cdot 10^{-2}$	$3,378 \cdot 10^{-2}$
4,75	$4,811 \cdot 10^{-2}$	$4,184 \cdot 10^{-2}$	$3,696 \cdot 10^{-2}$	$3,299 \cdot 10^{-2}$	$2,961 \cdot 10^{-2}$
5,00	$4,118 \cdot 10^{-2}$	$3,623 \cdot 10^{-2}$	$3,227 \cdot 10^{-2}$	$2,898 \cdot 10^{-2}$	$2,613 \cdot 10^{-2}$
5,25	$3,553 \cdot 10^{-2}$	$3,159 \cdot 10^{-2}$	$2,835 \cdot 10^{-2}$	$2,560 \cdot 10^{-2}$	$2,324 \cdot 10^{-2}$
5,50	$3,089 \cdot 10^{-2}$	$2,772 \cdot 10^{-2}$	$2,506 \cdot 10^{-2}$	$2,274 \cdot 10^{-2}$	$2,077 \cdot 10^{-2}$
5,75	$2,704 \cdot 10^{-2}$	$2,448 \cdot 10^{-2}$	$2,226 \cdot 10^{-2}$	$2,031 \cdot 10^{-2}$	$1,860 \cdot 10^{-2}$
6,00	$2,382 \cdot 10^{-2}$	$2,173 \cdot 10^{-2}$	$1,988 \cdot 10^{-2}$	$1,822 \cdot 10^{-2}$	$1,669 \cdot 10^{-2}$
6,50	$1,881 \cdot 10^{-2}$	$1,739 \cdot 10^{-2}$	$1,607 \cdot 10^{-2}$	$1,486 \cdot 10^{-2}$	$1,375 \cdot 10^{-2}$
7,00	$1,516 \cdot 10^{-2}$	$1,416 \cdot 10^{-2}$	$1,320 \cdot 10^{-2}$	$1,230 \cdot 10^{-2}$	$1,144 \cdot 10^{-2}$
7,50	$1,244 \cdot 10^{-2}$	$1,172 \cdot 10^{-2}$	$1,100 \cdot 10^{-2}$	$1,029 \cdot 10^{-2}$	$9,611 \cdot 10^{-3}$
8,00	$1,035 \cdot 10^{-2}$	$9,820 \cdot 10^{-3}$	$9,273 \cdot 10^{-3}$	$8,720 \cdot 10^{-3}$	$8,248 \cdot 10^{-3}$
8,50	$8,725 \cdot 10^{-3}$	$8,327 \cdot 10^{-3}$	$7,904 \cdot 10^{-3}$	$7,476 \cdot 10^{-3}$	$7,020 \cdot 10^{-3}$
9,00	$7,438 \cdot 10^{-3}$	$7,134 \cdot 10^{-3}$	$6,801 \cdot 10^{-3}$	$6,468 \cdot 10^{-3}$	$6,141 \cdot 10^{-3}$
9,50	$6,404 \cdot 10^{-3}$	$6,167 \cdot 10^{-3}$	$5,902 \cdot 10^{-3}$	$5,625 \cdot 10^{-3}$	$5,324 \cdot 10^{-3}$
10,00	$5,561 \cdot 10^{-3}$	$5,374 \cdot 10^{-3}$	$5,161 \cdot 10^{-3}$	$4,923 \cdot 10^{-3}$	$4,671 \cdot 10^{-3}$

Tab. 1.  $H^{(i+e)}(\beta^{(i+e)}; y)$  für die Mikroverteilung **bb**.

Für  $\bar{v}$  ist die mittlere thermische Geschwindigkeit der Elektronen einzusetzen:

$$\bar{v} = (2/\sqrt{\pi}) \sqrt{2 k T/m}. \quad (28)$$

Der entsprechende Wert von  $\Delta \bar{v}_{Gr}$  für die Ionen ist bei den Experimenten, die im Abschnitt C für den Vergleich mit der Theorie herangezogen werden, so klein, daß abgesehen von dem innersten Linienkern die Ionen nach der quasistatischen Theorie behandelt werden dürfen.

Um die mittlere STARK-Effekt-Konstante  $K$  zu erhalten, muß man die  $K_k$  aus Gl. (7) über die Zustände des oberen und des unteren Niveaus mitteln

(siehe <sup>4</sup>, p. 74). Man erhält dann — streng genommen nur für obere Hauptquantenzahl  $n_a \gg 1$ , aber in brauchbarer Näherung auch für kleinere  $n_a > 1$  —

$$\Delta \bar{v}_{Gr} = \frac{4}{3 \pi^2} \frac{m \bar{v}^2}{h c n_a (n_a - 1)}. \quad (27 b)$$

Nach Einsetzen von  $\bar{v}$  gemäß Gl. (28) folgt schließlich

$$\Delta \bar{v}_{Gr} = \frac{32}{3 \pi^3} \frac{k T}{h c n_a (n_a - 1)}. \quad (27 c)$$

Es sei darauf hingewiesen, daß GRIEM<sup>20</sup> einen etwa

<sup>20</sup> H. R. GRIEM, Astrophys. J. **136**, 422 [1962].

doppelt so großen Wert

$$\Delta \bar{\nu}_W = \frac{k T}{h c n_a^2} \quad (29)$$

als Grenze angibt, jenseits deren die quasistatische Theorie für Ionen und Elektronen anwendbar sei.

Von den vereinfachenden Annahmen, die schließlich zur Gl. (9) führen, sind zwei, nämlich a) und b) eingangs [Text bei Gl. (5)] bereits ausdrücklich erwähnt. Andere Annahmen verbergen sich bereits hinter der Gl. (4). Sie alle sollen nun der Reihe nach erörtert werden.

a) Befindet sich ein Wasserstoff-Atom in einem homogenen elektrischen Feld  $F$ , so läßt sich der Eigenwert des Energie-Operators für den durch die parabolischen Quantenzahlen  $n_1, n_2, m$  gekennzeichneten Zustand im Sinne einer Störungsrechnung folgendermaßen schreiben:

$$E_{n_1, n_2, m}(F) = E_n^{(0)} + E_{n_1, n_2, m}^{(1)}(F) + E_{n_1, n_2, m}^{(2)}(F) + \dots \quad (30)$$

Der ungestörte Eigenwert ist mit  $E_n^{(0)}$  bezeichnet, da

$$n = n_1 + n_2 + |m| + 1 \quad (31)$$

gilt.  $E_{n_1, n_2, m}^{(j)}(F)$  ist der Beitrag des STARK-Effektes  $j$ -ter Ordnung.

Bei einer folgerichtigen Störungsrechnung ist zugleich mit dem quadratischen STARK-Effekt auch die lineare Abhängigkeit der Matrixelemente des Dipolmomentes von der Feldstärke zu behandeln.

Diese beiden Effekte (und damit auch die entsprechenden Effekte höherer Ordnung) wird man vernachlässigen dürfen, wenn für alle in Betracht kommenden Feldstärken, etwa  $0 \leq F \leq 10 F_0$ ,

$$\left| \frac{E_{n_1, n_2, m}^{(2)}(F)}{E_{n_1, n_2, m}^{(1)}(F)} \right| \ll 1 \quad (32)$$

gilt, falls

$$n_1 \neq n_2$$

und infolgedessen

$$E_{n_1, n_2, m}^{(1)} \neq 0$$

ist. Wie man leicht zeigen kann (siehe z. B. <sup>9</sup>, p. 233) gilt unter dieser Voraussetzung

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{n^5}{n-1} \cdot \frac{F}{(e/a_0^2)} < \left| \frac{E_{n_1, n_2, m}^{(2)}(F)}{E_{n_1, n_2, m}^{(1)}(F)} \right| \leq \frac{n^3 [17n^2 + 19]}{24} \cdot \frac{F}{(e/a_0^2)} \quad (33)$$

Diese doppelte Ungleichung ist in der Tab. 2 für

$$F = F_0$$

unter den Versuchsbedingungen von VIDAL <sup>21, 22</sup> (siehe auch Abschnitt B):

$$N = N_i + N_e = 2,6 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$$

numerisch ausgewertet. Wie man sieht, bestehen unter diesen Bedingungen keine Bedenken, den STARK-Effekt als linear anzunehmen und für die Matrixelemente ihre Werte bei  $F = 0$  zu verwenden, zumal im allgemeinen der Wert des Verhältnisses  $|E_{n_1, n_2, m}^{(F)}(F)/E_{n_1, n_2, m}^{(F)}(F)|$  eher auf der linken als auf der rechten Seite der Ungleichung (33) zu finden sein wird. VIDAL hat auch keinerlei Asymmetrie der Linienprofile gemessen.

Linie	Untere Schranke	Obere Schranke
H <sub>6</sub>	$3,32 \cdot 10^{-5}$	$3,63 \cdot 10^{-4}$
H <sub>7</sub>	$5,97 \cdot 10^{-5}$	$7,79 \cdot 10^{-4}$
H <sub>8</sub>	$9,98 \cdot 10^{-5}$	$1,51 \cdot 10^{-3}$
H <sub>9</sub>	$1,57 \cdot 10^{-4}$	$2,71 \cdot 10^{-3}$
H <sub>10</sub>	$2,37 \cdot 10^{-4}$	$4,58 \cdot 10^{-3}$
H <sub>11</sub>	$3,43 \cdot 10^{-4}$	$7,37 \cdot 10^{-3}$
H <sub>12</sub>	$4,82 \cdot 10^{-4}$	$1,14 \cdot 10^{-2}$
H <sub>13</sub>	$6,60 \cdot 10^{-4}$	$1,69 \cdot 10^{-2}$
H <sub>14</sub>	$8,82 \cdot 10^{-4}$	$2,45 \cdot 10^{-2}$

Tab. 2. Obere und untere Schranke für das Verhältnis

$$|E_{n_1, n_2, m}^{(2)}(F_0)/E_{n_1, n_2, m}^{(1)}(F_0)|$$

gemäß Gl. (33);  $N = N_i + N_e = 2,6 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$ .

Bei größeren Störteilchen-Dichten müßten die Effekte höherer Ordnung berücksichtigt werden, wie das in Arbeiten von DRAWIN und Mitarbeitern <sup>23</sup> geschieht.

b) Wie man leicht zeigen kann, ist für die BALMER- und PASCHEN-Linien

$$\frac{(\bar{\nu}(0) + \Delta \bar{\nu})^4 - \bar{\nu}^4(0)}{\bar{\nu}^4(0)} \leq 1,2 \cdot 10^{-2}$$

und damit die Ungleichung (5) erfüllt, falls

$$|\Delta \bar{\nu}| \leq 15 \text{ cm}^{-1}$$

ist. In den Arbeiten <sup>21, 22</sup> erstrecken sich die Messungen nicht weiter in die Linienflügel.

c) Befindet sich das Plasma in einem Magnetfeld, so werden die Atome unter seinem Einfluß und dem des elektrischen Mikrofeldes einen kombinierten STARK-ZEEMAN-Effekt aufweisen. Seine quantenmechanische Theorie ist von DRAWIN und Mitarbeitern <sup>24</sup> für beliebige Lage der als homogen vorausgesetzten magnetischen und elektrischen Felder zu-

<sup>21</sup> C. R. VIDAL, Z. Naturforschg. **19a**, 947 [1964].

<sup>22</sup> C. R. VIDAL, Proc. 7th Intern. Conf. on Ionization Phenomena in Gases, Belgrad 1965.

<sup>23</sup> HOE-NGUYEN, E. BANNERJEA, H. W. DRAWIN u. L. HERMAN, J. Quant. Spectr. Radiative Transfer **5**, 835 [1965].

<sup>24</sup> L. HERMAN, NGUYEN-HOE, H. W. DRAWIN, B. PETROPOULOS u. C. DEUTSCH, Rapport EUR-CEA-FC-314; Fontenay-aux-Roses (Seine), Association Euratom-CEA sur la Fusion, August 1965.

einander entwickelt worden, die genannten Verfasser sind im Begriffe, auf dieser Grundlage im Rahmen einer quasistatischen Theorie Linienprofile zu berechnen. Experimentelle Linienprofile liegen bereits vor <sup>25</sup>.

Die folgende einfache Abschätzung soll zeigen, daß bei den experimentellen Untersuchungen <sup>21, 22</sup>, die im Abschnitt B in erster Linie für den Vergleich mit der Theorie herangezogen werden, der Einfluß des Magnetfeldes doch wohl vernachlässigt werden darf.

Der (normale) ZEEMAN-Effekt einer Spektrallinie besteht in dem Auftreten zweier zusätzlicher Komponenten, die gegenüber der ungestörten Linie um

$$\Delta \bar{\nu}_L = \pm \frac{e}{4 \pi m c} B = \pm 4,67 \cdot 10^{-2} \frac{B}{\text{kG}} \text{ cm}^{-1} \quad (34)$$

verschoben sind. Unter den experimentellen Bedingungen von <sup>21, 22</sup> ist

$$B = 1,85 \text{ kG}.$$

Der entsprechenden Verschiebung

$$\Delta \bar{\nu}_L = \pm 0,0863 \text{ cm}^{-1},$$

die ja für alle Linien dieselbe ist, stehen halbe Halbwertsbreiten der dort gemessenen Linien gegenüber, die für

$$n \geq 6$$

bei der BALMER-Serie  $\geq 0,68 \text{ cm}^{-1}$

und bei der PASCHEN-Serie  $\geq 0,52 \text{ cm}^{-1}$  sind.

d) Der Einfachheit halber ist die durch die relativistische Massenveränderlichkeit des Elektrons und durch seinen Spin verursachte Feinstruktur der Spektrallinien vernachlässigt. Dies ist nicht ganz selbstverständlich (siehe z. B. <sup>26</sup>, p. 12).

Da die Feinstruktur einer Spektrallinie hauptsächlich durch die Feinstruktur ihres unteren Niveaus bestimmt ist (siehe z. B. <sup>9</sup>, p. 85), genügt es, dessen Aufspalten unter der gemeinsamen Einwirkung von Feinstruktur und STARK-Effekt abzuschätzen.

Die Übergangsfeldstärke

$$F_C \approx \frac{\alpha^2}{2} \frac{e}{a_0^2} n^{-5} \approx \frac{10^2 \text{ kV}}{n^5 \text{ cm}} \quad (35)$$

(vgl. <sup>27</sup>, p. 304) ist die Feldstärke, bei welcher die Aufspaltung des Niveaus infolge des STARK-Effektes

dieselbe Größenordnung hat wie die Feinstruktur des nicht durch ein Feld beeinflussten Niveaus.

Für das untere Niveau z. B. der BALMER-Linien:

$$n = 2$$

ergibt sich auf diese Weise

$$F_C \approx 3 \text{ kV/cm}$$

( $\alpha$  = SOMMERFELDSche Feinstrukturkonstante).

Sobald die HOLTSMARKSche Normalfeldstärke [siehe Gl. (11)]

$$F_0 = 3,74 (N/10^{15} \text{ cm}^{-3})^{2/3} \text{ kV/cm}$$

diesen Wert von 3 kV/cm unterschreitet, was bei geringen Störteildichten ( $N < 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ ) eintritt, ist es also sicher nicht mehr statthaft, beim Niveau  $n = 2$  die Feinstruktur zu vernachlässigen, wie es in den vorliegenden Rechnungen geschehen ist.

Diese Inkonsequenz wirkt sich aber auf die Linienprofile insofern nicht aus, als die Linienverbreiterung vor allem auf die STARK-Effekt-Aufspaltung des oberen Niveaus zurückzuführen ist.

e) Vermutlich spielt die Tatsache, daß das elektrische Mikrofeld im Bereich des leuchtenden Atoms nicht homogen ist, nur eine untergeordnete Rolle, wenn sowohl die Ionen als auch die Elektronen im Rahmen einer quasistatischen Theorie behandelt werden (vgl. <sup>7</sup>, p. 94).

f) Um abschätzen zu können, in welchem Ausmaß die neutralen Wasserstoff-Atome eine Eigendruckverbreiterung ihrer Spektrallinien bewirken, genügt es, als mittleren Wert der adiabatischen Wechselwirkungskonstanten eines Niveaus  $n$

$$C \approx \frac{e^2}{4 \pi m \omega_{1n}} f_{1n} \quad (36)$$

(siehe <sup>2</sup>, p. 331) zu verwenden.  $f_{1n}$  ist die Absorptionsoszillatorenstärke des Überganges vom Grundniveau 1 zum Niveau  $n$ ,  $\omega_{1n}$  bedeutet die Kreisfrequenz dieses Überganges. Da infolge von Auswahlregeln immer nur ein Niveau von der Eigendruckverbreiterung betroffen ist, folgt aus der Gl. (36)

$$\begin{aligned} |C| &\leq \frac{e^2}{4 \pi m} \cdot \frac{\text{Max} \{f_{1n}\}}{\text{Min} \{\omega_{1n}\}} \\ &\leq \frac{e^2}{4 \pi m} \cdot \frac{1}{\omega_{1,va}} \\ &\leq 1,3 \cdot 10^{-9} \text{ cm}^3 \text{ sec}^{-1}. \end{aligned} \quad (37)$$

<sup>25</sup> H. W. DRAWIN, L. HERMAN u. NGUYEN-HOE, Rapport EUR-CEA-FC-321; Fontenay-aux-Roses (Seine), Association Euratom-CEA sur la Fusion, Oktober 1965.

<sup>26</sup> J. R. HISKES u. C. BRUCE TARTER, Radiative Transition Probabilities in Hydrogen, UCRL-7088 Rev. I, Physics, UC-34, TID-4500 (26th Ed.), University of California, Rad. Lab., Livermore, Calif. 1964.

<sup>27</sup> G. LÜDERS, Ann. Phys. (VI) **8**, 301 [1950].

Die Stoßdämpfungstheorie von LINDHOLM liefert für die ganze Halbwertsbreite  $\bar{\gamma}$  in der Wellenzahlskala (vgl. <sup>2</sup>, p. 304)

$$\bar{\gamma} = \frac{4\pi^3}{2\pi c} \cdot C \cdot N_1. \quad (38)$$

Dabei bezeichnet  $N_1$  die Teilchendichte der Wasserstoff-Atome im Grundzustand.

Aus den Gln. (37) und (38) folgt

$$\bar{\gamma} \leq 0,86 \cdot 10^{-18} (N_1/\text{cm}^{-3}) \text{ cm}^{-1}. \quad (39)$$

In Abschnitt B und C werden Werte von  $N_1$  auftreten, die bei

$$N_1 \approx 1 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$$

liegen, die Eigendruckverbreiterung ist unter diesen Bedingungen also ganz belanglos.

### B. Vergleich der theoretischen (quasistatischen) Profile untereinander

Die Ergebnisse der im Abschnitt A beschriebenen Rechnungen sollen an einigen typischen Beispielen erörtert und in den Abbildungen 2 und 3 veranschaulicht werden.

In jeder Abbildung findet man den Wert von  $\Delta\bar{\nu}_{\text{Gr}}$  eingezeichnet, wie er sich aus Gl. (27 c) für

$$T = 1850^\circ \text{K}$$

ergibt. Diese Temperatur herrschte in VIDALS Versuchsanordnung. Seine Messungen <sup>21, 22</sup> an einer Hochfrequenzentladung werden in Abschnitt C in erster Linie für den Vergleich zwischen Theorie und Experiment herangezogen werden.

$\alpha$ ) In der Abb. 2 sind für die BALMER-Linien  $H_6$ ,  $H_{10}$  und  $H_{14}$  die Linienprofile einander gegenübergestellt, die sich einerseits aus der Mikroföldverteilung **aa** und andererseits aus der Mikroföldverteilung **bb** ergeben. Die Art und Weise, in der die Profile ein und derselben Linie voneinander abweichen, kann man nach einem Blick auf die Abb. 1 und die Gl. (9) sofort verstehen. Die Teilchendichte

$$N_i = N_e = 1,3 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$$

ist ebenfalls diejenige aus VIDALS Messungen.

$\beta$ ) In der Abb. 3 ist am Beispiel der Linie  $H_{10}$  zu sehen, wie sich bei gegebenem Parameter  $y$  Linienprofile unterscheiden, in deren Mikroföldverteilung die Korrelation zwischen den Störteilchen in verschiedener Weise berücksichtigt ist. Bemerkenswert ist der ganz geringe relative Unterschied zwischen

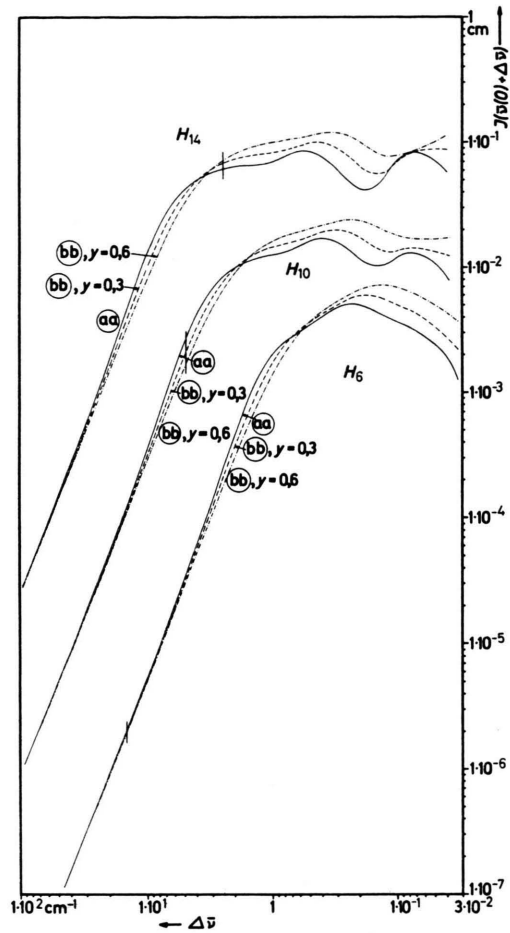


Abb. 2. Quasistatische Linienprofile für die BALMER-Linien  $H_6$ ,  $H_{10}$  und  $H_{14}$  bei  $N_i + N_e = 2,6 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$  gemäß verschiedenen Mikroföldverteilungen. Die Zahlenwerte entlang der Ordinatenachse gelten für die Linie  $H_{14}$ ; sie sind für die Linien  $H_{10}$  und  $H_6$  mit  $10^1$  bzw.  $10^2$  zu multiplizieren.

— **aa**;  
 - - - **bb**,  $y = 0,3$ ;  
 - · - **bb**,  $y = 0,6$ .

den Profilen **c**<sub>1</sub> und **bb**, der im Bereich  $|\Delta\bar{\nu}| > \Delta\bar{\nu}_{\text{Gr}}$  (für  $T = 1850^\circ \text{K}$ ,  $N_i = N_e = 1,3 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$ ) bei den BALMER-Linien  $H_6$  bis  $H_{16}$  und den PASCHEN-Linien  $P_6$  bis  $P_{16}$  weniger als 2% beträgt.

### C. Vergleich zwischen den theoretischen (quasistatischen) und den experimentellen Linienprofilen

Die Anforderungen, die an die experimentelle Seite für den Vergleich mit der Theorie zu stellen sind, findet man im Abschnitt A von <sup>1b</sup> ausführlich begründet. Hier genügen daher die Stichworte: op-

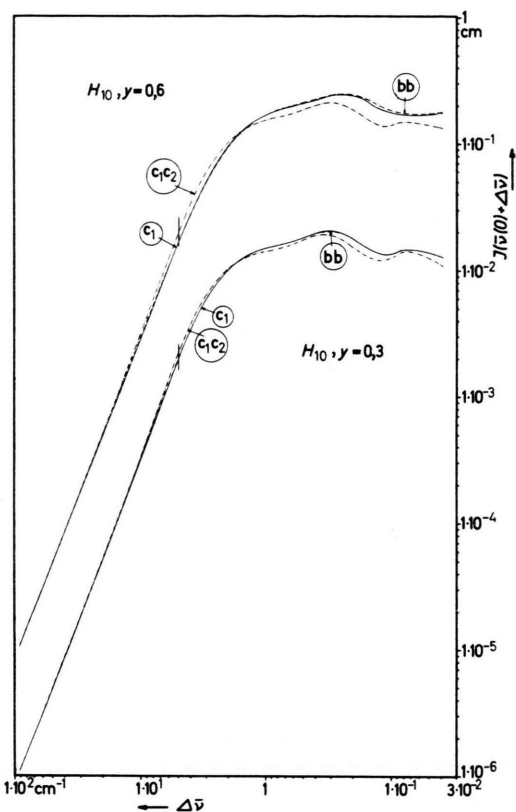


Abb. 3. Quasistatische Linienprofile für die BALMER-Linie  $H_{10}$  bei  $N_i + N_e = 2,6 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$  und  $y = 0,3$  und  $y = 0,6$  gemäß verschiedenen Mikrofeldverteilungen. Die Zahlenwerte entlang der Ordinatenachse gelten für den Fall  $y = 0,6$ ; sie sind für den Fall  $y = 0,3$  mit  $10^1$  zu multiplizieren.

—  $c_1$   
 - - -  $bb$   
 - · -  $c_1 c_2$

tisch dünne Emissionslinie über sehr schwachem Kontinuum aus einem Gebiet räumlich konstanter Dichte und Temperatur; Möglichkeit, den Intensitätsabfall von der Linienmitte bis weit in die Linienflügel hinein zu messen; Bestimmung der Temperatur und der Elektronendichte unabhängig von der Theorie der Linienverbreiterung. Diesen Anforderungen genügen VIDALS Messungen der Profile der BALMER-Linien  $H_4$  bis  $H_{15}$ <sup>21</sup> und der PASCHEN-Linien  $P_6$  bis  $P_{13}$ <sup>22</sup> in

sehr vollkommener Weise, wenn man von der Bestimmung der Elektronendichte einmal absieht.

Seine Messungen weisen gegenüber früheren an einer Entladung derselben Art und mit nahezu derselben Temperatur und Elektronendichte<sup>28, 29, 30</sup> den besonderen Vorteil auf, in den Linienflügeln zu sehr kleinen Intensitäten hinabzureichen, die in den günstigsten Fällen (Linien  $H_4$  bis  $H_8$ ) nur mehr  $1 \cdot 10^{-3}$  der Intensität in der Linienmitte betragen.

Ermutigt durch die Tatsache, daß die photoelektrisch gemessenen Profile ein und derselben Linie sich von einem Versuch zum anderen um höchstens 2% voneinander unterscheiden, hat VIDAL die Elektronendichte durchaus mit Hilfe der Theorie der Druckverbreiterung bestimmt — was als ein Nachteil im Sinne der obigen Forderungen zu werten ist — und dabei zweierlei vorausgesetzt:

a) Für  $\Delta \bar{\nu}$ , die hinreichend groß und ihrem Absolutbetrage nach  $\geq \Delta \bar{\nu}_{Gr} > 0$  sind, gelte stets [siehe die Gl. (9) und (25)]

$$J(\bar{\nu}(0) + \Delta \bar{\nu}) \cong \frac{15}{4\sqrt{2\pi}} (F_0^{(i+e)})^{3/2} \sum_{\substack{k \\ K_k \neq 0 \\ \text{Sgn}\{\Delta \bar{\nu}\} = \text{Sgn}\{K_k\}}} \frac{I_k}{|K_k|} \left( \frac{\Delta \bar{\nu}}{K_k} \right)^{-5/2} \quad (40)$$

$\Delta \bar{\nu}$  ist dann hinreichend groß, wenn auch für die dem Absolutbetrag nach größte STARK-Effekt-Konstante  $K_k$

$$|\Delta \bar{\nu} / F_0 K_k| \gg 1 \quad (41)$$

ist.

b) Die (von Linie zu Linie verschiedenen)  $\Delta \bar{\nu}^*$ , bis zu denen VIDAL die Profile der BALMER-Linien mit einem relativen Fehler von weniger als  $\pm 2,5\%$  messen konnte, seien bereits groß in dem eben unter a) genannten Sinne, so daß es auf Grund der Gl. (21) und (40) möglich sei,  $N_e$  aus den gemessenen  $J(\bar{\nu}(0) + \Delta \bar{\nu}^*)$  zu berechnen.

Seine Ergebnisse sind in der Tab. 3 zusammengefaßt<sup>31</sup>. Diese Tabelle muß man aber mit Vorbehalt betrachten, da die Voraussetzung b) doch nicht so gut erfüllt ist, wie man auf Grund der Tatsache, daß in der Umgebung von  $\Delta \bar{\nu}^*$  die gemessene Intensität  $\sim \Delta \bar{\nu}^{-m}$  mit  $m \approx 2,5$  abnimmt, erwarten könnte.

<sup>28</sup> K. BERGSTEDT, E. FERGUSON, H. SCHLÜTER u. H. WULFF, Proc. 5th Intern. Conf. on Ionization Phenomena in Gases, Vol. I, p. 437, North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1962.

<sup>29</sup> H. SCHLÜTER, Z. Naturforsch. **16 a**, 972 [1961].

<sup>30</sup> E. FERGUSON u. H. SCHLÜTER, Ann. Phys. N.Y. **22**, 351 [1963].

<sup>31</sup> Sie weichen von denen der Tab. II in <sup>22</sup> ab. Dort waren die gemessenen  $J(\bar{\nu}(0) + \Delta \bar{\nu}^*)$  irrtümlicherweise dem Ausdruck

$$\frac{15}{4\sqrt{2\pi}} (F_0^{(i+e)})^{3/2} \sum_{\substack{k \\ K_k \neq 0 \\ \text{Sgn}\{\Delta \bar{\nu}\} = \text{Sgn}\{K_k\}}} \frac{I_k}{|K_k|} \left( \frac{\Delta \bar{\nu}}{K_k} \right)^{-5/2}$$

gleichgesetzt worden, der gegenüber der richtigen rechten Seite der Gl. (40) einen Faktor  $F_0^{(i+e)}$  zuviel aufweist.

Schon aus den Abb. 2 und 3 ist zu entnehmen, daß für  $\Delta\bar{\nu} \approx \Delta\bar{\nu}^*$  die Ungleichung

$$J(\bar{\nu}(0) + \Delta\bar{\nu}) < J(\bar{\nu}(0) + \Delta\bar{\nu}^*) \quad (42)$$

Flügel, Gl. (40)                      Volle quasistat. Theorie

gilt, welche quasistatische Theorie man auch nehmen mag. Quantitativ erhält man die Tab. 4.

$n$	$\Delta\bar{\nu}^*$ cm <sup>-1</sup>	$2N_e$ 10 <sup>13</sup> cm <sup>-3</sup>	$n$	$\Delta\bar{\nu}^*$ cm <sup>-1</sup>	$2N_e$ 10 <sup>13</sup> cm <sup>-3</sup>
4	3,0	2,97 <sub>5</sub>	10	10,0	2,85
5	4,0	2,73	11	10,0	2,79 <sub>5</sub>
6	4,0	2,72	12	10,0	2,88
7	10,0	2,73	13	10,0	2,87
8	10,0	2,78	14	10,0	2,89
9	10,0	2,88			

Tab. 3. Elektronendichte bestimmt aus der „Flügel-Formel“ (40).

Linie	$\Delta\bar{\nu}$ cm <sup>-1</sup>	Intensitätsverhältnis für	
		$y = 0,3$	$y = 0,6$
H <sub>6</sub>	3,910	1,14 <sub>4</sub>	1,05 <sub>0</sub>
H <sub>7</sub>	9,740	1,06 <sub>5</sub>	1,02 <sub>3</sub>
H <sub>8</sub>	10,15	1,09 <sub>5</sub>	1,03 <sub>6</sub>
H <sub>9</sub>	10,44	1,13 <sub>2</sub>	1,04 <sub>8</sub>
H <sub>10</sub>	10,64	1,17 <sub>1</sub>	1,05 <sub>8</sub>
H <sub>11</sub>	10,80	1,21 <sub>4</sub>	1,06 <sub>7</sub>
H <sub>12</sub>	10,92	1,25 <sub>6</sub>	1,07 <sub>3</sub>
H <sub>13</sub>	11,01	1,28 <sub>8</sub>	1,07 <sub>2</sub>
H <sub>14</sub>	11,08	1,30 <sub>5</sub>	1,06 <sub>1</sub>

Tab. 4. Vergleich von theoretischen Intensitäten  $J(\bar{\nu}(0) + \Delta\bar{\nu})$  [quasistatische Theorie **bb** / Flügel, Gl. (40)] im Linienflügel.

Die Schrittweite im Programm für die Linienprofile ist schuld daran, daß die  $\Delta\bar{\nu}$  in Tab. 4 nicht genau mit den  $\Delta\bar{\nu}^*$  aus Tab. 3 übereinstimmen.

Es ist daher zu erwarten, daß die aus der „Flügel-Formel“ (40) bestimmten Werte für  $N_e$  systematisch zu groß sind, und zwar um so mehr, je größer die Hauptquantenzahl  $n$  der benutzten Linie ist.

Abgesehen von der etwas stärkeren Abweichung bei H<sub>11</sub> ist ein derartiger Gang mit  $n$  von  $n = 6$  ab in der Tab. 3 durchaus zu erkennen (bei den Linien H<sub>4</sub> und H<sub>5</sub> macht sich der Einfluß von DOPPLER-Verbreiterung und ZEEMAN-Effekt bemerkbar).

Der Gedanke liegt nahe, diesen Gang mit  $n$  auszunutzen, um aus den Werten der Tab. 3 auf die unverfälschte Elektronendichte  $N_e$  zu schließen. Das würde jedoch nur möglich sein, wenn man sich – wie in Tab. 4 geschehen – für eine unter den quasistatischen Theorien entschiede. So bleibt nichts anderes übrig als festzustellen, daß der vermutete Gang der Größenordnung und dem Vorzeichen nach vorhanden ist.

Nähert man die Intensität im Linienflügel durch

$$J(\bar{\nu}(0) + \Delta\bar{\nu}) = \text{const } \Delta\bar{\nu}^{-m} \quad (43)$$

an, so findet man für den Exponenten  $m$  Werte (siehe die Tab. 5 a und 5 b), die zu dem eben entwickelten Bild passen, wonach VIDALS Messungen nicht so weit in die Flügel reichen, daß man exakt  $m = 5/2$  erwarten kann. In Tab. 5 a sind die  $\Delta\bar{\nu}_2$  mit den  $\Delta\bar{\nu}^*$  aus Tab. 3 identisch, die  $\Delta\bar{\nu}_1$  sind derart gewählt, daß an den gemessenen  $J(\bar{\nu}(0) + \Delta\bar{\nu})$  im Bereich  $(\bar{\nu}(0) + \Delta\bar{\nu}_1, \bar{\nu}(0) + \Delta\bar{\nu}_2)$  gerade noch keine Abweichung vom linearen Zusammenhang zwischen  $\log \{J(\bar{\nu}(0) + \Delta\bar{\nu})\}$  und  $\log \{\Delta\bar{\nu}\}$  zu bemerken ist.

In Tab. 5 b sind die  $\Delta\bar{\nu}_1$  und  $\Delta\bar{\nu}_2$  denjenigen in Tab. 5 a so weit angepaßt, als es aus den im Vorstehenden erläuterten Gründen möglich ist.

Linie	$\Delta\bar{\nu}_1$ cm <sup>-1</sup>	$\Delta\bar{\nu}_2$ cm <sup>-1</sup>	$m$
H <sub>6</sub>	2	4	2,5 <sub>3</sub>
H <sub>7</sub>	3	10	2,5 <sub>3</sub>
H <sub>8</sub>	3,5	10	2,4 <sub>9</sub>
H <sub>9</sub>	4	10	2,5 <sub>0</sub>
H <sub>10</sub>	5	10	2,5 <sub>0</sub>
H <sub>11</sub>	6	10	2,5 <sub>4</sub>
H <sub>12</sub>	7	10	2,4 <sub>9</sub>
H <sub>13</sub>	7	10	2,4 <sub>7</sub>
H <sub>14</sub>	8	10	2,4 <sub>0</sub>

Tab. 5 a. Gemessene <sup>21</sup> Exponenten  $m$  für den Intensitätsabfall in den Linienflügeln.

Linie	$\Delta\bar{\nu}_1$ cm <sup>-1</sup>	$\Delta\bar{\nu}_2$ cm <sup>-1</sup>	Exponent $m$ für	
			$y = 0,3$	$y = 0,6$
H <sub>6</sub>	1,955	3,910	2,682	2,524
H <sub>7</sub>	3,131	9,740	2,646	2,541
H <sub>8</sub>	3,625	10,15	2,667	2,529
H <sub>9</sub>	3,727	10,44	2,636	2,490
H <sub>10</sub>	5,321	10,64	2,661	2,501
H <sub>11</sub>	6,170	10,80	2,633	2,472
H <sub>12</sub>	7,017	10,92	2,585	2,434
H <sub>13</sub>	7,076	11,01	2,463	2,354
H <sub>14</sub>	7,915	11,08	2,374	2,300

Tab. 5 b. Theoretische Exponenten  $m$  für den Intensitätsabfall in den Linienflügeln bei Verwendung der Mikrofeldverteilung **bb** und der Elektronendichte  $N_e = 1,3 \cdot 10^{13}$  cm<sup>-3</sup>.

Wie bereits erwähnt, darf man voraussetzen, der mittlere relative Fehler von  $J(\bar{\nu}(0) + \Delta\bar{\nu}_2)$  in Tab. 5 a sei nicht größer als  $\pm 2,5\%$ . Im Vergleich dazu ist der mittlere relative Fehler von  $J(\bar{\nu}(0) + \Delta\bar{\nu}_1)$  viel kleiner, so daß er = 0 gesetzt werden darf, da  $J(\bar{\nu}(0) + \Delta\bar{\nu}_1)$  erheblich größer als  $J(\bar{\nu}(0) + \Delta\bar{\nu}_2)$  ist und daher sicherer gemessen werden kann. Unter diesen Voraussetzungen ergibt das GAUSSsche Fehler-

fortpflanzungsgesetz aus den Daten der Tab. 5 a bei der Linie

$$H_{14} \quad |\Delta m| \leq 0,12.$$

Dies ist der ungünstigste Fall, da hier das Verhältnis  $(\Delta \bar{\nu}_2/\Delta \bar{\nu}_1) = 1,25$  so klein ist. Günstiger ist die Lage bei der Linie

$$H_6 \quad |\Delta m| \leq 0,04$$

mit einem Verhältnis  $(\Delta \bar{\nu}_2/\Delta \bar{\nu}_1) = 2$ .

Die Werte von  $|\Delta m|$  für die anderen Linien liegen zwischen diesen Extremen.

In den Bereichen

$$1,5 \text{ cm}^{-1} \leq |\Delta \bar{\nu}| \leq 4 \text{ cm}^{-1} \quad (44 \text{ a})$$

für  $H_6$  und

$$4 \text{ cm}^{-1} \leq |\Delta \bar{\nu}| \leq 10 \text{ cm}^{-1} \quad (44 \text{ b})$$

für  $H_7$  bis  $H_{12}$  lassen sich die gemessenen Intensitäten mit einem relativen Fehler von weniger als  $\pm 5\%$  durch die Linienprofile **bb** annähern, wenn man

$$N_e = 1,3 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3} \quad (45 \text{ a})$$

und

$$y = 0,6 \quad (45 \text{ b})$$

wählt. Die Gründe für den Unterschied zwischen diesem Wert für  $N_e$  und denen der Tab. 3 sind im Voranstehenden dargelegt. Die  $\Delta \bar{\nu}$  aus den Bereichen (44 a) und (44 b) sind noch so klein, daß

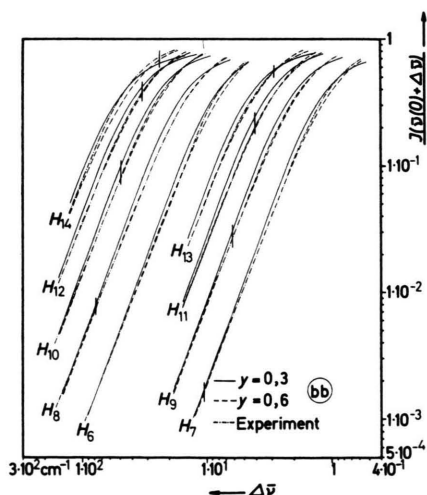


Abb. 4. Vergleich zwischen den gemessenen <sup>21</sup> und den quasistatischen theoretischen Profilen der BALMER-Linien gemäß der Mikrofeldverteilung **bb**. Die Zahlenwerte entlang der Abszissenachse gelten für die Linien mit ungerader oberer Hauptquantenzahl; diese Zahlenwerte sind für die Linien mit gerader oberer Hauptquantenzahl mit  $10^{-1}$  zu multiplizieren.  
—  $y=0,3$ ; ---  $y=0,6$ .

der mittlere relative Fehler der gemessenen Intensitäten weniger als  $\pm 2,5\%$  beträgt.

Möglicherweise ließe sich eine noch etwas bessere Übereinstimmung mit einer ein klein wenig größeren Elektronendichte erzielen:

$$N_e = 1,35 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}.$$

Bei der Unsicherheit, die dem ganzen Verfahren anhaftet, hat es keinen Sinn, sich für den einen oder anderen Wert zu entscheiden.

In der Abb. 4 sind die gemessenen Profile gemeinsam mit den theoretischen gemäß der Mikrofeldverteilung **bb** aufgezeichnet, und zwar getrennt nach Linien mit gerader und mit ungerader oberer Hauptquantenzahl, um die Abbildung übersichtlich bleiben zu lassen.

Im Gegensatz zu den Abb. 2 und 3 stellt die Ordinate das Verhältnis  $J(\bar{\nu}(0) + \Delta \bar{\nu})/J(\bar{\nu}(0))$  dar. Für die gemessenen Profile hat diese Größe unmittelbar einen Sinn. Für die theoretischen Profile ist sie durch

$$\left( \frac{J(\bar{\nu}(0) + \Delta \bar{\nu})}{J(\bar{\nu}(0))} \right)_{\text{theor.}} = J(\bar{\nu}(0) + \Delta \bar{\nu})_{\text{theor.}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{J(\bar{\nu}(0) + \Delta \bar{\nu})}{J(\bar{\nu}(0))} \right)_{\text{exp.}} d(\Delta \bar{\nu}) \quad (46)$$

zu erklären, um eine einheitliche Normierung zu erreichen. Die Elektronendichte gemäß Gl. (45 a) und die Temperatur

$$T = 1850 \text{ }^\circ\text{K} \quad (47)$$

ergeben

$$y = 0,33.$$

Auf dem Boden der quasistatischen Theorien, die bisher bekannt sind, ist nicht einzusehen, warum die theoretischen Profile mit dem Parameter  $y = 0,6$  so viel besser zu den gemessenen passen als diejenigen mit  $y = 0,3$ .

Diese Diskrepanz tritt in fast derselben Weise bei den diffusen Helium-Linien auf <sup>1 b, 32</sup>; sie fehlt andererseits erstaunlicherweise bei VIDALS experimentellen und theoretischen Untersuchungen <sup>33 a, 33 b</sup> über die Verschmelzung von Wasserstoff-Linien, obwohl dort die quasistatischen Profile **c**<sub>1</sub> der vorliegenden Arbeit verwendet sind.

Die Möglichkeit ist nicht auszuschließen, daß der Wert  $y = 0,6$  nur eine Interpolation ohne jeden Erkenntniswert gestattet und die gemessenen Profile

<sup>32</sup> H. PFENNIG, J. Quant. Spectr. Radiative Transfer, im Druck.

<sup>33</sup> C. R. VIDAL, a) J. Quant. Spectr. Radiative Transfer, im Druck; b) *ibid.*, im Druck.

sich ohne jeden Zwang erklären lassen, wenn man die Elektronen nach einer umfassenderen Theorie behandelt, die den allmählichen Übergang von der Stoßdämpfungs- zur quasistatischen Näherung einwandfrei wiedergibt und die auch für hohe obere Hauptquantenzahlen unter den durch die Gln. (45 a) und (47) gegebenen Bedingungen gültig ist. Eine solche Theorie liegt indessen im Augenblick nicht vor (vgl. GRIEMS Diskussionsbemerkung zu <sup>22</sup>, ferner die Angaben in <sup>34</sup> über den Gültigkeitsbereich der dort vorgeschlagenen verbesserten Stoßdämpfungstheorie).

Um durch das Experiment eine der quasistatischen Mikrofeldverteilungen als die richtige eindeutig bestätigen zu können, wird es erforderlich sein, zu höheren  $N_e$  und zu größeren  $y$  überzugehen, weil

dann ein größerer Teil des Linienprofils in dem ohne jeden Zweifel quasistatischen Bereichen liegen wird und die theoretischen Profile stärker auffächern werden.

In diesem Abschnitt war bisher nur von den BALMER-Linien die Rede. Die Messungen an den PASCHEN-Linien <sup>22</sup> sagen nichts Neues aus, da sich bei ihnen der Meßbereich gerade noch bis zum Ansatz der quasistatischen Linienflügel erstreckt. Immerhin kann man feststellen (siehe <sup>22</sup>, Abb. 2), daß die theoretischen quasistatischen Linienflügel sehr gut an die Messungen anschließen.

Der Verfasser dankt Frau Dr. E. TREFFTZ und Herrn Dr. C. R. VIDAL für zahlreiche Diskussionen, Frau A. TROSTEL für die Hilfe bei den numerischen Rechnungen und Frau G. WIMMERSBERGER für das Anfertigen der Abbildungen.

<sup>34</sup> NGUYEN-HOE, H. W. DRAWIN u. L. HERMAN, Rapport EUR-CEA-FC-310; Fontenay-aux-Roses (Seine), Groupe des Recherches sur la Fusion Contrôlée, Juni 1965.